

FUNCIONES COMPATIBLES DE AHUSAMIENTO Y VOLUMEN EN UNA PLANTACIÓN FORESTAL COMERCIAL DE *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen EN TLATLAUQUITEPEC, PUEBLA

COMPATIBLE TAPER AND VOLUME FUNCTIONS IN A COMMERCIAL FOREST PLANTATION OF *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen IN TLATLAUQUITEPEC, PUEBLA

Luis Martínez-Angel^{1,2}, Héctor M. de los Santos-Posadas^{1*}, Aurelio M. Fierros-González¹, Francisco Cruz-Cobos³, Gerónimo Quiñonez-Barraza⁴

¹Ciencias Forestales. Campus Montecillo. Colegio de Postgraduados. 56230. Montecillo, Estado de México. (hmsantos@colpos.mx). ²Centro Nacional de Investigación Disciplinaria en Conservación y Mejoramiento de Ecosistemas Forestales. INIFAP. Progreso # 5. C. P. 56225. Barrio de Santa Catarina, Coyoacan. México. ³Instituto Tecnológico de El Salto. Mesa del Tecnológico s/n. 34942. El Salto, Pueblo Nuevo, Durango, México. ⁴Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agrícolas y Pecuarias. Campo Experimental Valle del Guadiana, Durango, México.

RESUMEN

Las funciones de ahusamiento o de perfil fustal son herramientas matemáticas prácticas para cuantificar el volumen y la distribución de productos de árboles en pie. Estos datos son relevantes en la elaboración de programas de manejo forestal para el aprovechamiento maderable. El objetivo de este estudio fue ajustar diferentes modelos de volumen total, funciones segmentadas de ahusamiento compatibles con el volumen comercial, modelos de volumen total dentro de la ecuación segmentada compatible de ahusamiento-volumen de Fang y analizar los diferentes tipos dendrométricos en la función segmentada de Fang. Todo ello para obtener el mejor sistema de cubicación para *Pinus chiapensis* en una plantación forestal comercial en Tlatlauquitepec, Puebla, México. Los datos de 35 árboles derribados de 3, 5, 6 y 7 años se evaluaron, y se generaron en total 485 pares de observaciones de diámetros y alturas a lo largo del fuste. Para los cálculos de cubicación de volumen se empleó el método de trozas traslapadas. Las funciones segmentadas de Fang, Max y Burkhart mostraron mejor precisión, de acuerdo con el coeficiente de determinación mayor y valores menores en la raíz del cuadrado medio de error, coeficiente de variación y sesgo promedio absoluto. La función segmentada de Fang sugiere dos puntos de inflexión, el primero ocurrió al 5 % e indicó el cambio geométrico de neiloide a paraboloid, y el segundo se presentó al 50 % de la altura total, lo que indicó el cambio geométrico del paraboloid a cono. El modelo de

ABSTRACT

Taper, or stem profile functions are practical mathematical tools for quantifying the volume and distribution of products of standing trees. These data are relevant in creating forest management programs for timber production. The objective of this study was to fit different models of total volume, segmented taper functions compatible with merchantable volume, models of total volume within the compatible segmented taper-volume function of Fang, and to analyze the different dendrometric types in the segmented function of Fang. All this to obtain the best volume system for *Pinus chiapensis* in a commercial forest plantation in Tlatlauquitepec, Puebla, Mexico. Data from 35 felled trees, 3, 5, 6 and 7 years old were evaluated and a total of 485 pairs of observations of diameters and heights along the stem were generated. To calculate stem volume, the overlapping bolts method was used. The segmented functions of Fang, Max and Burkhart showed better precision, evidenced by higher coefficients of determination and lower values in the mean square root of the error, coefficient of variation and average absolute bias. The segmented Fang function suggests two inflexion points. The first occurred at 5% and indicated a geometric change from neiloid to paraboloid, and the second occurred at 50% of the total height, indicating the geometric change from paraboloid to cone. The model of the combined fitted variable in the Fang system denotes a mean form factor of 0.39, closer to a cone than to a paraboloid. The statistical results indicated that the Fang compatible system combined with the Takata total volume model allow precise prediction of taper and of total and merchantable volume.

* Author for correspondence ♦ Autor responsable.

Received: enero, 2018. Approved: febrero, 2018.

Published as ARTÍCULO in *Agrociencia* 53: 381-401. 2019.

la variable combinada ajustado en el sistema de Fang, denota un factor medio de forma de 0.39, más cercano a un cono que a un paraboloides. Los resultados estadísticos indicaron que el sistema compatible de Fang combinado con el modelo de volumen total de Takata permiten predecir con precisión el ahusamiento, volumen total y comercial.

Palabras clave: *Pinus chiapensis*, perfil del fuste, volumen comercial, diámetro comercial.

INTRODUCCIÓN

Las funciones de ahusamiento son herramientas matemáticas que permiten cuantificar el volumen y la distribución de productos derivados de árboles en pie. Estas herramientas son importantes en la elaboración de programas de manejo para aprovechamiento maderable, porque posibilitan estimar el ingreso financiero del bosque a partir de datos inventarios forestales, en función de la distribución de los productos en cada unidad de manejo y a nivel predial.

Los volúmenes de árboles en pie se estiman con ecuaciones de volumen total, que consideran el diámetro normal y la altura total como variables independientes (Tamarit *et al.*, 2014). Para la clasificación de productos de árboles comerciales se recurre a dos tipos de ecuaciones: funciones de razón de volumen y funciones de ahusamiento; las primeras realizan predicciones de la fracción del volumen comercial variable de un árbol como un porcentaje del volumen total (Cao *et al.*, 1980); las segundas son la expresión matemática del cambio en el diámetro del fuste en función de la altura, de acuerdo con las especies, edad, densidad y otros factores que afectan la calidad de estación (Brooks *et al.*, 2008).

Una vez integrada la ecuación de ahusamiento, se obtiene una ecuación de volumen total y volumen comercial, a partir de la cual es posible ubicar cualquier segmento del fuste y obtener estimaciones precisas de diámetro, volumen total, volumen comercial y altura comercial para cualquier diámetro o alturas deseadas (Cao *et al.*, 1980; Kozak, 2004). Dado que estas ecuaciones comparten los mismos parámetros y la misma estructura geométrica, constituyen un sistema de ahusamiento y volumen comercial (Cruz-Cobos *et al.*, 2008).

Hay ecuaciones de ahusamiento desde funciones de ahusamiento simples (Demaerschalk, 1972;

Key words: *Pinus chiapensis*, stem profile, merchantable volume, merchantable diameter.

INTRODUCTION

Taper functions are mathematical tools that allow quantification of volume and distribution of products derived from trees while they are still standing. These tools are important in creating management programs for timber production because they make it possible to estimate the potential forest income from forest inventory data, in function of the distribution of the products in each management unit and at estate level.

Volumes of standing trees are estimated with total volume equations that consider diameter at breast height and total height as independent variables (Tamarit *et al.*, 2014). To classify products of merchantable trees, two types of equations are used: volume ratio functions and taper functions. The former predicts the fraction of variable merchantable volume of a tree as a percentage of the total volume (Cao *et al.*, 1980). The latter is the mathematical expression of the change in stem diameter in function of height, depending on the species, age, density and other factors that affect the station quality (Brooks *et al.*, 2008).

Once the taper function is integrated, a total volume and merchantable volume equation is obtained. From this equation it is possible to obtain the volume at any segment of the stem and obtain precise estimations of diameter, total volume, merchantable volume and merchantable height for any desired diameter or height (Cao *et al.*, 1980; Kozak, 2004). Given that these equations share the same parameters and the same geometric structure, they constitute a taper and merchantable volume system (Cruz-Cobos *et al.*, 2008).

Taper equations exist from simple taper functions (Demaerschalk, 1972; McTague and Bailey, 1987; Zakrzewski and MacFarlane, 2006) to segmented functions (Max and Burkhart, 1976; Fang *et al.*, 2000; Jiang *et al.*, 2005). Simple taper functions describe stem profile less precisely, while segmented functions provide estimations of diameters with more reduced biases in most of the stem and are more precise in estimating total and merchantable volumes. Moreover, they permit describing dendrometric tree types: neiloid in the lower section, cylindrical or

McTague y Bailey, 1987; Zakrzewski y MacFarlane, 2006) hasta las complejas, como las funciones segmentadas (Max y Burkhart, 1976; Fang *et al.*, 2000; Jiang *et al.*, 2005). Las funciones de ahusamiento simples describen con menor precisión el perfil del fuste, mientras que las funciones segmentadas proporcionan estimaciones de diámetros con sesgos más reducidos en la mayor parte del fuste y son más precisas para estimar el volumen total y comercial. Además, permiten describir los tipos dendrométricos del árbol: neiloide en la sección inferior, cilindro o paraboloides en la sección media y cónico en la sección superior (Max y Burkhart, 1976).

El objetivo de esta investigación fue ajustar modelos de volumen total, funciones segmentadas de ahusamiento compatibles con el volumen comercial y la función segmentada de Fang *et al.* (2000), variando la ecuación de volumen total y analizar los diferentes tipos dendrométricos en la función segmentada de Fang *et al.* (2000) para *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen, en una plantación forestal comercial en Tlatlauquitepec, Puebla, México. El desarrollo de estas funciones permitirá cuantificar el volumen maderable en árboles en pie y calcular la distribución de productos de los árboles medidos en inventarios forestales maderables.

MATERIALES Y MÉTODOS

Descripción del área de estudio y de las variables dasométricas

Este estudio se realizó en una plantación de 115 ha de *P. chiapensis*, la cual se estableció en terrenos que antes se destinaban a la producción frutícola y cafetalera. Existe una cronosecuencia de edades de árboles debido a que las plantaciones se establecieron en 2007, 2008, 2009 y 2011. Las coordenadas son 19° 38' y 20° 03' N y 97° 23' y 97° 37' O. Relictos de Bosque Mesófilo de Montaña rodean a la plantación, ubicada en el Municipio de Tlatlauquitepec, Puebla. El clima es semicálido húmedo con lluvias todo el año, con una temperatura media anual de 17 °C y una precipitación media anual de 2350 mm (INEGI, 2009).

Para el estudio se utilizó información de 35 árboles de *P. chiapensis* de edades diferentes (3, 4, 5 y 7 años) provenientes de un muestreo destructivo realizado en 2014; se seleccionaron árboles sin daño físico evidente y que cubrieran todas las categorías de diámetro y altura identificadas. En los árboles derribados las variables medidas fueron las siguientes: diámetro con corteza (d

paraboloides en la sección media y cónico en la sección superior (Max y Burkhart, 1976).

The objective of this study was to fit models of total volume, total volume segmented taper functions compatible with merchantable volume and the segmented function of Fang *et al.* (2000), varying the total volume equation and to analyze the different dendrometric types in the segmented function of Fang *et al.* (2000) for *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen, in a commercial forest plantation in Tlatlauquitepec, Puebla, Mexico. The development of these functions will permit quantification of timber volume in standing trees and calculation of the distribution of products of the trees measured in forest timber inventories.

MATERIALS AND METHODS

Description of the study area and dasometric variables

This study was conducted in a 115-ha plantation of *P. chiapensis*, which was established in land previously used for fruit and coffee production. There is a chrono-sequence of tree ages because the plantations were established in 2007, 2008, 2009 and 2011. The coordinates are 19° 38' and 20° 03' N and 97° 23' and 97° 37' W. Relicts of Mountain Mesophyll Forest surround the plantation, which is located in the municipality of Tlatlauquitepec, Puebla. The climate is warm and humid with rain all year, mean annual temperature of 17 °C and mean annual precipitation of 2350 mm (INEGI, 2009).

For the study, information from 35 *P. chiapensis* trees of different ages (3, 4, 5 and 7 years old) from a destructive sampling conducted in 2014 was used. We selected trees with no apparent physical damage and that covered all the identified diameter and height categories. In the felled trees, the measured variables were the following: diameter with bark (d in cm) and merchantable heights (H_m in m) measured every meter from the stump (H_b in cm) up to total height (H in m), including diameter at breast height (D in cm).

From the analysis, 485 pairs of observations on diameters (d) and height (H_m) along the stem were generated. For cubic volume, the Bailey (1995) method of overlapping bolts was used as the fundament for the Newton formula and the centroid method of Wiant *et al.* (1992). Table 1 presents statistics of the variables used in the fit of the models to estimate total volume, stem profile and merchantable volume for *P. chiapensis*.

Before fitting the compatible segmented functions, a graph analysis of the variables was carried out to detect atypical values, which permitted auditing and correcting the data base. (Figure 1).

en cm) y alturas comerciales (H_m en m) tomadas a cada metro a partir del tocón (H_p en cm), hasta la altura total (H en m), incluyendo el diámetro normal (D en cm).

Del análisis se generaron 485 pares de observaciones de diámetros (d) y alturas (H_m) a lo largo del fuste. Para la cubicación de volumen se utilizó el método de trozas traslapadas de Bailey (1995), usado como fundamento de la fórmula de Newton y el método del centroide de Wiant *et al.* (1992). Los estadísticos de las variables empleadas en el ajuste de los modelos para estimar el volumen total, el perfil del fuste y volumen comercial para *P. chiapensis* se presentan en el Cuadro 1.

Previo al ajuste de las funciones segmentadas compatibles, se realizó un análisis gráfico de las variables con la finalidad de detectar valores atípicos, lo cual permitió auditar y corregir la base datos (Figura 1).

Los modelos evaluados para estimar el volumen total (Cuadro 2), así como el perfil del fuste, se ajustaron como un sistema de ecuaciones simultáneas con el volumen comercial, excepto el modelo 8 (Cuadro 3).

The evaluated models for estimation of total volume (Table 2), as well as the stem profile, were fitted as a system of simultaneous equations with the merchantable volume, except for model 8 (Table 3).

Statistics and selection criteria

Evaluation of the exactness and precision of the models was based on graph and numerical analyses of the residuals. The graph analysis of residuals against the predicted values allowed evaluation and detection of possible anomalies of the model residuals, and the numerical analysis consisted in evaluating the following statistics: mean square root of the error (*RMSE*), coefficient of variation (*CV*), adjusted coefficient of determination (R_{adj}^2), and absolute average bias (\bar{E}).

$$RMSE = \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 / n - p \right]^{0.5} \tag{9}$$

Cuadro 1. Estadísticos de las variables dasométricas de la base de datos utilizada.
Table 1. Statistics of the dasometric variables of the database used.

VARIABLES DASOMÉTRICAS	N	Media	Mínimo	Máximo	D.E.
Diámetro (d, cm) con corteza a la altura H_m	495	10.59	0.02	31.10	8.09
Diámetro normal con corteza (D, cm)	35	15.20	3.20	26.50	6.76
Altura relativa (H_m , m)	495	5.56	0.05	17.05	4.51
Altura total (H, m)	35	11.08	4.25	17.05	3.79
Edad (años)	35	6.00	3.00	7.00	1.29

N número de observaciones, D.E. desviación estándar. ♦ N number of observations, D.E. standard deviation.

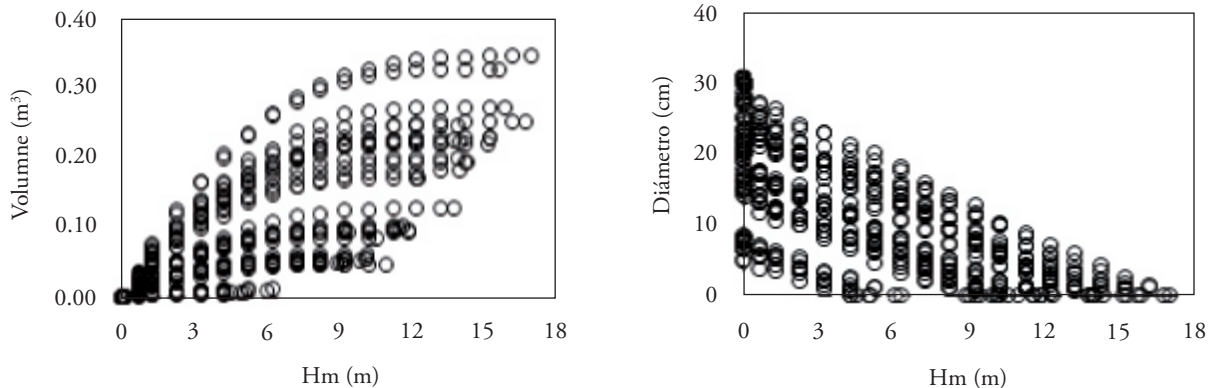


Figura 1. Distribución del volumen (A) y del diámetro acumulado (B) a diferentes alturas (H_m).
Figure 1. Volume distribution (A) and accumulated diameter (B) at different heights (H_m).

Cuadro 2. Modelos de volumen total.

Table 2. Total volume models.

Nombre	Ecuación	Modelo
Schumacher y Hall (Schumacher y Hall,1933),	$V=\alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2}$	1
Variable combinada (Spurr, 1952)	$V=\alpha_0 + \alpha_1 D^2 H$	2
Coefficiente de forma constante (Torres y Magaña, 2001)	$V=\alpha_1 D^2 H$	3
Takata (Takata, 1958)	$V=D^2 H/(\alpha_0 + \alpha_1 D)$	4

V volumen total (m³), D diámetro normal (cm), H altura total (m) y α_i son parámetros a estimar mediante el ajuste. ♦ V total volume (m³), D diameter at breast height (cm), H total height (m) and α_i are parameters to be estimated by means of the fit.

Estadísticos y criterios de selección

La evaluación de la exactitud y precisión de los modelos se basó en un análisis gráfico y numérico de los residuales. El análisis gráfico de residuales contra los valores predichos permitió evaluar y detectar posibles anomalías de los residuales de los modelos; y el análisis numérico consistió en evaluar los estadísticos siguientes: raíz del cuadrado medio de error (RMSE), coeficiente de variación (CV), coeficiente de determinación ajustado (R_{adj}^2), y sesgo promedio absoluto (\bar{E}).

$$RMSE = \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n - p \right]^{0.5} \tag{9}$$

$$CV = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n-1) \right]^{0.5}}{\bar{y}} \times 100 \tag{10}$$

$$R_{adj}^2 = 1 - \left[\frac{(n-1) \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-p) \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right] \tag{11}$$

$$\bar{E} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \right) \tag{12}$$

donde $y_i, \hat{y}_i \in \bar{y}$, son los valores observados, estimados y promedios de la variable dependiente (volumen total, volumen comercial y ahusamiento), n es el número total de observaciones usadas en el ajuste de los modelos, p es el número de parámetros del modelo.

$$CV = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / (n-1) \right]^{0.5}}{\bar{y}} \times 100 \tag{10}$$

$$R_{adj}^2 = 1 - \left[\frac{(n-1) \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-p) \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right] \tag{11}$$

$$\bar{E} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \right) \tag{12}$$

where $y_i, \hat{y}_i \in \bar{y}$, are the observed, estimated and average values of the dependent variable (total volume, merchantable volume, and taper), n is the total number of observations used in the model fits, p is the number of model parameters.

Fitting strategy

Segmented taper functions were fit with the seemingly unrelated regression technique (SUR), which is appropriate for fitting compatible taper and merchantable volume systems using the Model procedure of SAS/ETS[®] (SAS Institute Inc., 2008). SUR fitting homogenizes and optimizes the standard error of the parameters and allows complete compatibility of the taper and merchantable volume components (Fang *et al.*, 2000; Cruz-Cobos *et al.*, 2008).

Correction of autocorrelation

In the regression analysis, it is assumed that the terms of error are independent, with a homogenous distribution. However,

Cuadro 3. Sistemas compatibles de ahusamiento y volumen comercial.

Table 3. Compatible taper and merchantable volume systems.

<p>(modelo 5) Fang <i>et al.</i> (2000)</p> $d = c_1 \left[H^{\frac{k-\beta_1}{\beta_1}} (1-q)^{\frac{k-\beta}{\beta}} \alpha_1^{I_1+I_2} \alpha_2^{I_2} \right]^{1/2} \text{ donde } \begin{cases} I_1 = 1 \text{ si } p_1 \leq q \leq p_2; \text{ de lo contrario } 0 \\ I_2 = 1 \text{ si } p_2 \leq q \leq 1; \text{ de lo contrario } 0 \end{cases}$ $R_0 = (1 - H_b / H)^{K/\beta_1} \quad R_1 = (1 - p_1)^{K/\beta_1} \quad R_2 = (1 - p_2)^{K/\beta_2} \quad \beta = \beta_1^{1-(I_1+I_2)} \beta_2^{I_1} \beta_3^{I_2}$ $\alpha_1 = (1 - p_1)^{\frac{K(\beta_2 - \beta_1)}{\beta_1 \beta_2}} \quad \alpha_2 = (1 - p_2)^{\frac{K(\beta_3 - \beta_2)}{\beta_2 \beta_3}} \quad C1 = \sqrt{\frac{\alpha_0 D^{\alpha_1} H^{\alpha_2 - \frac{k}{\beta_1}}}{\beta_1(R_0 - R_1) + \beta_2(R_1 - \alpha_1 R_2) + \beta_3 \alpha_1 R_2}}$ $V_c = C_1^2 H^{\frac{k}{\beta_1}} \left[\beta_1 R_0 + (I_1 + I_2) + (\beta_2 - \beta_1) R_1 + I_2 (\beta_3 - \beta_2) \alpha_1 R_2 - \beta (1 - q)^{\frac{k}{\beta}} \alpha_1^{I_1+I_2} \alpha_2^{I_2} \right]$
<p>(Modelo 6) Max y Burkhart (1976)</p> $d = D \left[\beta_1 (q - 1) + \beta_2 (q^2 - 1) + \beta_3 (p_1 - q)^2 I_1 + \beta_4 (p_2 - q)^2 I_2 \right]^{1/2} \text{ donde } \begin{cases} I_1 = 1 \text{ si } q \leq p_1; \text{ de lo contrario } 0 \\ I_2 = 1 \text{ si } q \leq p_2; \text{ de lo contrario } 0 \end{cases}$ $V_c = kD^2 H \left\{ \frac{\beta_2}{3} (q^3 - z_1^3) + \frac{\beta_1}{2} (q^2 - z_1^2) - (\beta_1 + \beta_2)(q - z_1) - \frac{\beta_3}{3} [(p_1 - q)^3 J_1 - (p_1 - z_1)^3 K_1] - \frac{\beta_4}{3} [(p_2 - q)^3 J_2 - (p_2 - z_1)^3 K_2] \right\} \text{ donde } \begin{cases} J_1 = 1 \text{ si } q \leq p_1; J_2 = 0 \text{ si } q > p_2 \\ K_1 = 1 \text{ si } z_1 \leq p_1; K_2 = 0 \text{ si } z_1 > p_1 \end{cases}$
<p>(Modelo 7) Parresol <i>et al.</i> (1987)</p> $d = D \left[Z^2 (\beta_1 + \beta_2 Z) + (Z - p_1)^2 (\beta_3 + \beta_4 (Z + 2p_1) I_1) \right]^{1/2}$ $V_c = kD^2 H \left\{ \left[\frac{\beta_2 + \beta_4 I_1}{4(Z^4 - Z_b^4)} \right] + \left[\frac{\beta_1 + \beta_3 I_1}{3(Z^3 - Z_b^3)} \right] + \left[\frac{2\beta_1(p_1 I_1) + (2p_1 \beta_4)}{2(Z^2 - Z_b^2)} \right] + ((p_1^2 I_1 \beta_3) + (2p_1 - \beta_4)(Z - Z_b)) \right\}$ $I_1 = 1 \text{ si } Z \geq p_1; \text{ de lo contrario } 0$
<p>(Modelo 8) Zepeda y Domínguez (1997)</p> $d = D \left\{ \beta_1 \left[\frac{(H - H_m)}{(H - 1.3)} \right] + \beta_2 \left[\frac{(H - H_m)}{(H - 1.3)} \right]^2 + \beta_3 \left[p_1 - \frac{(H - H_m)}{(H - 1.3)} \right] I_1 + \beta_4 \left[p_2 - \frac{(H - H_m)}{(H - 1.3)} \right]^2 I_2 \right\}$ $\text{donde } \begin{cases} I_1 = 1 \text{ si } X \geq p_1; \text{ de lo contrario } 0 \\ I_2 = 1 \text{ si } X \geq p_2; \text{ de lo contrario } 0 \end{cases}$

D diámetro normal (cm), d diámetro (cm) a la altura H_m (m) desde el nivel del tocón, H altura total (m), H_b altura del tocón (m), V_c volumen comercial (m³), k constante p/40 000, α, β, p_i, son parámetros a ser estimados mediante el ajuste, I_i variables indicadoras de los cambios dendrométricos en el fuste del árbol. ♦ D diameter at breast height (cm), d diameter (cm) at height H_m (m) from the stump, H total height (m), H_b stump height (m), V_c merchantable volume (m³), k constant p/40 000, α, β, p_i, are parameters to be estimated by means of the fit, variables indicators of dendrometric changes in the tree stem.

Estrategia de ajuste

El ajuste de las funciones segmentadas de ahusamiento se realizó con la técnica de regresión aparentemente no relacionada (SUR), la cual es apropiada para ajustar sistemas compatibles

construction of taper functions requires multiple observations for each tree and, therefore, it is reasonable to expect that the observations within each of the trees are spatially correlated, violating the principle of independence of the errors (Rojo *et al.*, 2005).

de ahusamiento y volumen comercial, usando el procedimiento Model de SAS/ETS[®] (SAS Institute Inc., 2008). El ajuste con SUR homogeniza y optimiza el error estándar de los parámetros, y permite la compatibilidad completa en los componentes de ahusamiento y volumen comercial (Fang *et al.*, 2000; Cruz-Cobos *et al.*, 2008).

Corrección de la autocorrelación

En el análisis de regresión se asume que los términos de error son independientes, con distribución homogénea. Sin embargo, la construcción de las funciones de ahusamiento requiere observaciones múltiples para cada árbol y, por tanto, es razonable esperar que las observaciones dentro de cada uno de los árboles estén correlacionadas espacialmente, lo cual viola el principio de independencia de los errores (Rojo *et al.*, 2005).

En nuestro estudio se usó una estructura de error autorregresiva continuo CAR (2), de segundo orden, para corregir la autocorrelación en la función de ahusamiento, la cual consideró la distancia entre las mediciones de la altura comercial en cada árbol, la estructura del modelo CAR (2) amplía los términos del error bajo la expresión siguiente (Zimmerman y Núñez-Antón, 2001):

$$e_{ij} = d_1 \gamma_1^{h_{ij} - h_{ij-1}} e_{ij-1} + d_2 \gamma_2^{h_{ij} - h_{ij-2}} e_{ij-2} + \varepsilon_{ij} \tag{13}$$

donde e_{ij} es el j th residual ordinario en el i th individuo (es decir, la diferencia entre los diámetros observados y estimados del i th árbol a la altura de medición, i), $d=1$ para $i > 1$, $k=1$, y $d_i=0$ para $j \leq i$, γ_i son los parámetros autorregresivos para estimar, y $h_{ij} - h_{ij}$ son la distancia de separación de la j th a la j th- i observación dentro de cada árbol, $h_{ij} > h_{ij} - i$, siendo ε_{ij} el término del error bajo la condición de independencia. La estructura CAR (2) fue ajustada simultáneamente con la estructura de la media de las funciones de ahusamiento, en el procedimiento MODEL de SAS/ETS[®] (SAS Institute Inc., 2008), el cual permite una actualización dinámica de los residuales. El objetivo de la corrección de autocorrelación en la función de ahusamiento fue obtener estimaciones imparciales (sin sesgo) y eficientes de los parámetros (Rojo *et al.*, 2005).

Para definir el mejor sistema de cubicación de volumen total y comercial de árboles individuales se evaluaron modelos de volumen total dentro de la función segmentada de Fang *et al.* (2000). Para ello se evaluaron las diferencias de las medias entre los componentes de ahusamiento y volumen comercial, mediante la prueba de Tukey. Así, cada función segmentada se consideró

In our study, we used a second order continuous autoregressive error structure (CAR (2) to correct autocorrelation in the taper function, which considered the distance between measurements of merchantable height on each tree. The CAR (2) model structure amplifies the terms of error under the following expression (Zimmerman and Núñez-Antón, 2001):

$$e_{ij} = d_1 \gamma_1^{h_{ij} - h_{ij-1}} e_{ij-1} + d_2 \gamma_2^{h_{ij} - h_{ij-2}} e_{ij-2} + \varepsilon_{ij} \tag{13}$$

where e_{ij} is the j th ordinary residual in the i th individual (that is, the difference between observed and estimated diameters of the i th tree at the measurement height, j), $d=1$ for $i > 1$, $k=1$, and $d_i=0$ for $j \leq i$, γ_i are the autoregressive parameters to be estimated, and $h_{ij} - h_{ij}$ is the separation distance of the j th to the j th- i observation within each tree, $h_{ij} > h_{ij} - i$, ε_{ij} being the term of error under the condition of independence. CAR (2) was adjusted simultaneously with the structure of the mean of the taper functions in the MODEL procedure of SAS/ETS[®] (SAS Institute Inc., 2008), which allows dynamic updating of the residuals. The objective of correcting autocorrelation in the taper function was to obtain impartial (without bias), efficient estimations of the parameters (Rojo *et al.*, 2005).

To define the best system for obtaining total and merchantable cubic volume of individual trees, we evaluated total volume models within the segmented function of Fang *et al.* (2000). To this end, we evaluated the differences of the means between the taper components and merchantable volume with the Tukey test. In this way, each segmented function was considered an experimental unit and the values of taper and merchantable volume were grouped with Tukey multiple comparison tests

Analysis of *P. chiapensis* dendrometric types

The segmented taper function and merchantable volume of Fang *et al.* (2000) allows analysis of different dendrometric types represented in each segment of the stem. The form factor (k) for each stem segment was calculated with the methodology suggested by Uranga-Valencia *et al.* (2105), using the parameters β_i of the segmented function of Fang *et al.* (2000), with the expression $k = \beta_i \times \left(\frac{40000}{\pi} \right)$, where k defines the dendrometric body type that is described in each segment of the stem. When the k value is 0.25, the dendrometric body is neiloid; when k is 0.33, it is conical; and when k is 0.5, it is paraboloid. This approach is applied for the model volume of constant shape; the expression is $\bar{k} = \alpha_i \times \left(\frac{40000}{\pi} \right)$.

como una unidad experimental y los valores de ahusamiento y volumen comercial se agruparon con pruebas de comparación múltiple de Tukey.

Análisis de los tipos dendrométricos de los árboles de *P. chiapensis*

La función segmentada de ahusamiento y volumen comercial de Fang *et al.* (2000) permite analizar los diferentes tipos dendrométricos representados en cada segmento del fuste. El factor de forma (*k*) para cada segmento del fuste se calculó con la metodología sugerida por Uranga-Valencia *et al.* (2105) utilizando los parámetros β_i de la función segmentada de Fang *et al.* (2000), con la expresión siguiente $k = \beta_i \times \left(\frac{40000}{\pi}\right)$, donde *k* define el tipo de cuerpo dendrométrico que se describen en cada segmento del fuste; cuando el valor de *k* es 0.25 el cuerpo dendrométrico corresponde a un neiloide, cuando *k* es 0.33 corresponde a un cono, y cuando *k* es 0.5 corresponde a un paraboloide. Este enfoque se aplica para el modelo de volumen de coeficiente de forma constante, la expresión es $\bar{k} = \alpha_i \times \left(\frac{40000}{\pi}\right)$.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Modelos de volumen total

Los modelos de volumen total evaluados presentaron estadísticos de ajuste eficientes, y el 99 % de variación de volumen fue explicado por el diámetro normal y la altura total. Los valores de los parámetros estimados con sus respectivos errores estándar se muestran en el Cuadro 4. Los parámetros en todos los modelos de volumen total fueron altamente significativos

RESULTS AND DISCUSSION

Total volume models

The total volume models evaluated had efficient fit statistics, and 99 % of the variation in volume was explained by diameter at breast height and total height. The values of the parameters estimated with their respective standard errors are shown in Table 4. The parameters in all the total volume models were highly significant at a confidence level of 95%. The statistics in the four models suggest that all the models produce adequate estimations of total volume. The most precise was that of Schumacher and Hall (1), followed by the Takata model (4). The constant form model (3) had the highest variation.

These models are used in biometric studies to estimate timber volumes in natural forests (Corral-Rivas and Nívar-Cháidez, 2009; Tapia and Nívar, 2011; Ramos-Uvilla *et al.*, 2014) and in commercial conifer and broadleaf forest plantations, and the results are adequate (Fernández *et al.*, 2011; Muñoz *et al.*, 2012; Barrios *et al.*, 2014). Melchor *et al.* (2006) generated and validated the Schumacher and Hall (1933) model for natural *P. chiapensis* forests of Veracruz and Puebla to obtain more realistic timber volume estimations.

Based on the fit statistics and the graphical analysis of the residuals, the Schumacher and Hall model (1) is proposed to estimate total volume in *P. chiapensis* trees. Analysis of the residuals did not evidence problems of heteroscedasticity (Figure 2). The residuals obtained exhibit a homogeneous distribution relative to the predicted volumes.

Cuadro 4. Estadísticos de ajuste, valores y significancia de los parámetros de los modelos de volumen total.

Table 4. Adjustment statistics, values and significance of the parameters of total volume models.

Modelo	R ² _{adj}	RMSE	CV	p	ψ	ε ^t	∞
1	0.9966	0.0058	4.6927	α ₀	0.000065	8.658E-6	<0.0001
				α ₁	1.630512	0.0614	<0.0001
				α ₂	1.15635	0.0816	<0.0001
2	0.9939	0.0078	6.4286	α ₀	0.007846	0.00202	0.0005
				α ₁	0.00003	4.06E-7	<0.0001
3	0.9914	0.0093	7.2123	α ₁	0.000031	3.185E-7	<0.0001
4	0.9965	0.0060	4.8988	α ₀	22021.63	1304.7	<0.0001
				α ₁	437.2664	58.5201	<0.0001

p parámetro, ψ valor de los estimadores de los parámetros, ε^t error estándar de los estimadores de los parámetros, ∞ nivel de significancia de los parámetros. ♦ p parameter, ψ value of estimators of parameters, ε^t standard error of the estimators of the parameters, ∞ level of significance of the parameters.

con un nivel de confiabilidad de 95 %. Los estadísticos en los cuatro modelos sugieren que todos producen una estimación adecuada del volumen total, y el más preciso fue el de Schumacher y Hall (1), seguido del modelo de Takata (4). El modelo de forma constante (3) presentó una mayor variación.

Estos modelos se emplean en estudios biométricos para estimar los volúmenes maderables en bosques naturales (Corral-Rivas y Nívar-Cháidez, 2009; Tapia y Nívar, 2011; Ramos-Uvilla *et al.*, 2014) y en plantaciones forestales comerciales de coníferas y latifoliadas, y los resultados son adecuados (Fernández *et al.*, 2011; Muñoz *et al.*, 2012; Barrios *et al.*, 2014). Melchor *et al.* (2006) generaron y validaron el modelo de Schumacher y Hall (1933) para *P. chiapensis* en bosques naturales de Veracruz y Puebla, para obtener estimaciones volumétricas más realistas para el aprovechamiento maderable.

Con base en los estadísticos de ajuste y al análisis gráfico de los residuales se propone el modelo de Schumacher y Hall (1) para estimar de volumen total en árboles de *P. chiapensis*. El análisis de los residuales no evidenció problemas de heterocedasticidad (Figura 2). Los residuales obtenidos presentan una distribución homogénea frente a los volúmenes predichos.

La relación que muestran los predichos del volumen frente a los valores de la variable combinada (D×H) confirma la bondad del modelo para estimar el volumen total maderable de árboles de *P. chiapensis* (Figura 3).

Funciones segmentadas de ahusamiento

Los valores de los estadísticos evaluados y las estimaciones de los parámetros con sus respectivos errores estándar en las funciones segmentadas de ahusamiento se muestran en el Cuadro 5. Los parámetros en todos los modelos de volumen total resultaron altamente significativos con un nivel de confiabilidad de 95 %. Las funciones segmentadas de ahusamiento se corrigieron con una estructura de error autorregresiva de segundo orden CAR (2). Los valores de la prueba de Durbin-Watson (DW) cercanos a 2 indican la corrección de la autocorrelación en las funciones de ahusamiento (Durbin y Watson, 1971), y esto implica que los errores son independientes. Todas las funciones segmentadas de ahusamiento presentaron estadísticos de ajuste eficientes, con una mínima variación entre las funciones ajustadas: coeficiente de

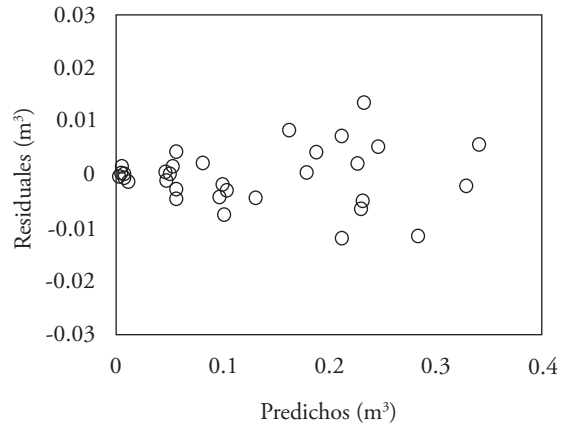


Figura 2. Residuales del volumen con respecto al volumen predicho.

Figure 2. Residuals of volume relative to predicted volume.

The relationship between predicted volume and the values of the combined variable (D×H) confirm the goodness of the model to estimate total timber volume of *P. chiapensis* trees (Figure 3).

Segmented taper functions

The values of the evaluated fit statistics and the estimations of the parameters with their respective standard errors in the segmented taper functions are shown in Table 5. The parameters in all the total volume models were highly significant at a confidence level of 95 %. The segmented taper functions were

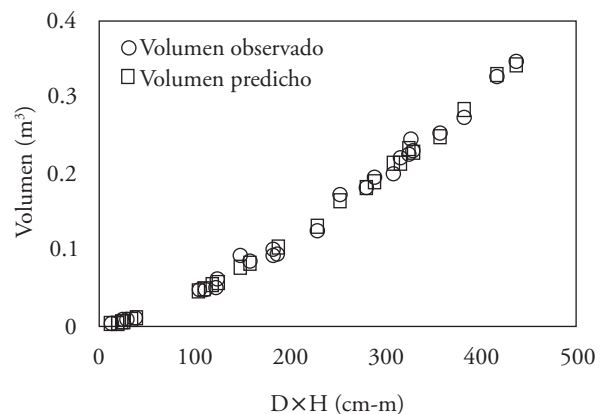


Figura 3. Valores observados y predichos del volumen en función de D×H (cm-m).

Figure 3. Observed and predicted values of volume in function of D×H (cm-m).

Cuadro 5. Estadísticos de ajuste, valores y significancia de los parámetros de las funciones segmentadas de ahusamiento.
Table 5. Fit statistics, values and significance of the parameters of the segmented taper functions.

M	RMSE	R ² _{adj}	CV	Sesgo	DW	p	ψ	ε^t	∞
5	0.6857	0.9923	5.9519	0.0264	2.1518	a_0	0.000075	6.643E-6	<0.0001
						a_1	1.851916	0.0606	<0.0001
						a_2	0.849415	0.0831	<0.0001
						b_1	9.853E-6	4.306E-7	<0.0001
						b_2	0.000027	4.447E-7	<0.0001
						b_3	0.000024	5.177E-7	<0.0001
						ρ_1	0.053027	0.00357	<0.0001
						ρ_2	0.508309	0.0420	<0.0001
						γ_1	0.375334	0.0671	<0.0001
						γ_2	0.268446	0.0526	<0.0001
						β_1	-2.90801	0.00979	<0.0001
						β_2	1.5	-	-
						β_3	77.1951	14.8901	<0.0001
						β_4	-0.43208	0.1442	0.0029
6	0.7864	0.9895	6.5252	0.0804	2.1754	ρ_1	0.07457	0.00821	<0.0001
						ρ_2	0.661974	0.0818	<0.0001
						γ_1	0.486947	0.0733	<0.0001
						γ_2	0.359544	0.0518	<0.0001
						β_1	1.069888	0.0619	<0.0001
						β_2	0.262023	0.0947	0.0059
						β_3	-491.461	91.7093	<0.0001
						β_4	191.1822	33.8423	<0.0001
						ρ_1	0.808494	0.0140	<0.0001
						γ_1	0.451135	0.0664	<0.0001
						γ_2	0.37065	0.0482	<0.0001
						β_1	0.888779	0.0439	<0.0001
						β_2	-0.29354	0.1156	0.0114
						β_3	-0.48241	0.1192	<0.0001
β_4	2.201728	0.2962	<0.0001						
8	0.7805	0.9907	7.3112	0.0267	2.0972	ρ_1	0.221798	0.0242	<0.0001
						ρ_2	0.82035	0.0348	<0.0001
						γ_1	0.347879	0.0626	<0.0001
						γ_2	0.134032	0.0442	0.0026

M modelo, p parámetro, ψ valor de los estimadores de los parámetros, ε^t error estándar de los estimadores de los parámetros, - no existe información, ∞ nivel de significancia de los parámetros. ♦ M model, p parameter, ψ value of parameter estimators, ε^t standard error of parameter estimators, de, - no information exists, ∞ level of significance of the parameters.

determinación de 98 % a 99 %; raíz del cuadrado medio de error de 0.68 m³ a 0.78 m³; coeficiente de variación de 5.95 % a 7.13 % y sesgo promedio absoluto de 0.02 m³ a 0.08 m³.

Los modelos 5 y 6 estiman el primer punto de inflexión al 5 % y 7 % de la altura total, lo cual indica el cambio geométrico teórico de un neiloide (tocón) a un paraboloides (fuste central); el segundo punto de inflexión sucede al 50 % y 66 %, indicando el cambio geométrico teórico del paraboloides a un cono (punta) respectivamente. El modelo 5 sugiere fustes menos cilíndricos con respecto a su altura total, y el

corrected with a second order autoregressive error structure CAR (2). The values of the Durbin-Watson (DW) test close to 2 indicate the correction of the autocorrelation in the taper functions (Durbin and Watson, 1971), and this implies that the errors are independent. All the segmented taper functions exhibited efficient fit statistics with minimum variation between the fitted functions: coefficient of determination (98 to 99%, mean square root of the error (0.68 m³ to 0.78 m³), coefficient of variation (5.95% to 7.13%) and average absolute bias (0.02 m³ to 0.08 m³).

modelo 6 fustes más cilíndricos con respecto al segundo punto de inflexión, mientras que los modelos 7 y 8 mostraron mayor variación en los puntos de inflexión. Los puntos de inflexión ($\rho_1=7\%$ y $\rho_2=58\%$) son similares a los obtenidos por Tamarit *et al.* (2013) para árboles de *Tectona grandis* L. f. creciendo en plantaciones forestales comerciales en Campeche, Tabasco y Chiapas, y a los obtenidos por Fang *et al.* (2000) para plantaciones forestales de *Pinus taeda* L. y *Pinus elliottii* Engelm. ($\rho_1=7\%$ y $\rho_2=56\%$) establecidas en la costa atlántica de Georgia y norte de Florida, EE.UU.

Los valores de los estadísticos de ajuste evaluados mostraron diferencias mínima en los cuatro modelos, pero la selección del modelo 5 fue evidente porque presentó mejores estadísticos, al obtener mayor coeficiente de determinación ajustado (99.23 %), lo cual indica la variabilidad total explicada por el modelo y valores menores en la raíz del cuadrado medio del error (0.68 m³), el cual representa el error medio del modelo para predecir la variable dependiente; coeficiente de variación (5.95 %) y sesgo (0.02 m³) representan la desviación del modelo con respecto a los valores observados. Además, el modelo 5 tiene una ventaja comparativa respecto a los otros modelos probados, es preciso para describir el perfil del fuste de los árboles y tener explícitamente un modelo de volumen total, que corresponde a Schumacher y Hall (1933); también puede ser sustituido por cualquier otro modelo de volumen total. Según el orden de selección, el segundo modelo que presentó excelentes estadísticos de ajuste fue el modelo (6).

Con los parámetros estimados del modelo 5 fue posible determinar que el cuerpo geométrico por debajo del primer punto de inflexión indica que los árboles de las plantaciones forestales comerciales tienen un factor de forma $k_1=0.13$ para β_1 , mientras que la sección media (β_2) tiene un $k_3=0.34$, lo cual indica una forma de fuste cercana a un cono perfecto; y la sección superior (β_3) del fuste un $k=0.31$ también cercano a un cono. El factor de forma promedio obtenido es $\bar{k}=0.26$ (calculado como, $\bar{k} = \sum_{i=1}^n k_i + k_2 + k_3 / n$). Aunque aún no se ha manifestado el desarrollo final de los árboles de las plantaciones, es decir que para árboles de 7 años las formas generales encontradas son de cuerpos geométricos todavía con tendencia fuerte a la conicidad, aunque el segmento medio es de mayor factor, lo

Models 5 and 6 estimate the first inflection point at 5 % and 7 % of the total height, indicating the theoretical geometric change from neiloid (stump) to a paraboloid (middle stem). The second inflection point occurs at 50 % and 66 %, indicating the theoretical geometric change from paraboloid to cone (tip), respectively. Model 5 suggests less cylindrical stems relative to their total height. Model 6 describes more cylindrical stems relative to the second inflection point, while models 7 and 8 show greater variation at the inflection points. The inflection points ($\rho_1 = 7\%$ and $\rho_2 = 58\%$) are similar to those obtained by Tamarit *et al.* (2013) for *Tectona grandis* L. f. trees growing in commercial forest plantations in Campeche, Tabasco and Chiapas, and to those obtained by Fang *et al.* (2000) for *Pinus taeda* L. and *Pinus elliottii* Engelm forest plantations ($\rho_1 = 7\%$ and $\rho_2 = 56\%$) on the Atlantic coast of Georgia and northern Florida, USA.

The values of the fit statistics evaluated exhibited minimum differences among the four models, but the selection of model 5 was evident because it had the best statistics, obtaining a higher adjusted coefficient of determination (99.23 %), which indicates the total variability explained by the model and lower values in the mean square root of the error (0.68 m³), which represents the mean error of the model for predicting the dependent variable. The coefficient of variation (5.95 %) and bias (0.02 m³) represent the deviation of the model from the observed values. Moreover, model 5 has a comparative advantage over the other tested models: it is precise in the description of the stem profile of the trees and is explicitly a total volume model, which corresponds to Schumacher and Hall (1933). It can also be substituted by any other total volume model. According to the order of selection, the second model that had excellent adjustment statistics was model (6).

With the estimated parameter of model 5, it was possible to determine that the geometric body below the first inflection point indicates that the trees of commercial forest plantations have a form factor $k_1=0.13$ for β_1 , while the middle section (β_2) has a $k_3=0.34$, which indicates a stem shape of a near perfect cone. The upper section (β_3) of the stem has a $k=0.31$, also nearly a cone. The average form factor obtained is $\bar{k}=0.26$ (calculated as $\bar{k} = \sum_{i=1}^n k_i + k_2 + k_3 / n$). The final development

cual sugiere que está en transición hacia el paraboloid. Uranga-Valencia *et al.* (2015) mencionan que los bosques sujetos a una silvicultura intensiva mejoran la forma de los fustes de los árboles (tienden a ser más cilíndricos), por lo anterior se esperaría que las labores silvícolas como manejo de la densidad (aclareos y podas), así como el crecimiento, deberían incrementar el factor de forma de los árboles. Un muestreo destructivo en años subsecuentes y edades mayores permitiría definir mejor el factor de forma de los árboles de esta plantación, más cerca del turno técnico financiero o silvícola.

El modelo 5 se ha utilizado en estudios biométricos para describir el perfil del fuste y volúmenes totales y comerciales en diferentes condiciones de bosque, tanto en plantaciones forestales comerciales como en bosques naturales (Corral-Rivas *et al.*, 2007; Quiñonez-Barraza *et al.*, 2014; Tamarit *et al.*, 2014; Uranga-Valencia *et al.*, 2015) y los resultados son precisos. Por tanto, la aplicación del modelo 5 permite obtener el perfil del fuste a cualquier altura comercial deseada con precisión mayor.

El análisis gráfico de los residuales del modelo 5 no mostró problemas de heterocedasticidad, pues presenta una distribución homogénea frente a los diámetros predichos (Figura 4), y resulta eficiente para estimar el perfil de fuste de *P. chiapensis*, dado que las estimaciones con respecto a los observados son similares (Figura 5).

La distribución de los residuales del ahusamiento por categoría de altura relativa (H_m/H), expresado

of the plantation trees has not yet been manifested; that is, for 7-year-old trees, the general shapes found are geometric bodies that still have a strong tendency toward conicity. However, the middle segment has a higher factor, suggesting that there is a transition toward a paraboloid. Uranga-Valencia *et al.* (2015) mention that forests subjected to intensive silviculture improve tree stem shape (they tend to be more cylindrical), and thus it would be expected that silvicultural practices, such as managing density (thinning and pruning), as well as growth, should increase the form factor of the trees. A destructive sampling in subsequent years and at older ages would permit better defining of the form factor of the trees of this plantation, closer to their financial or silvicultural rotation.

Model 5 has been used in biometric studies to describe stem profile and total and merchantable volumes in different forest conditions, in both commercial forest plantations and natural forests (Corral-Rivas *et al.*, 2007; Quiñonez-Barraza *et al.*, 2014; Tamarit *et al.*, 2014; Uranga-Valencia *et al.*, 2015), and the results are precise. Therefore, application of model 5 allows us to estimate stem profile accurately at any desired merchantable height.

The graph analysis of model 5 residuals did not exhibit problems of heteroscedasticity since it has a homogeneous distribution relative to the predicted diameters (Figure 4), and it is efficient in estimating *P. chiapensis* stem profile given that its estimations are similar to observed diameters (Figure 5).

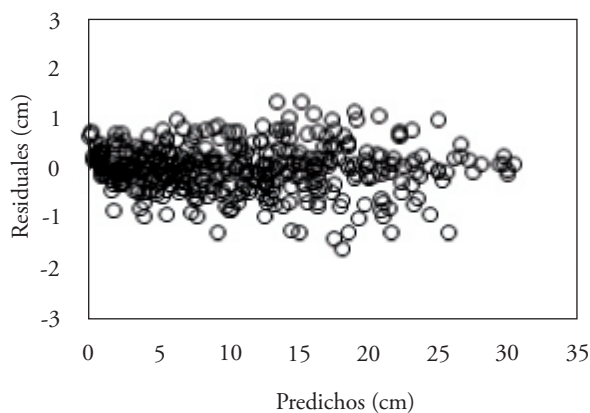


Figura 4. Distribución de los residuales frente a valores predichos del ahusamiento (d).

Figure 4. Distribution of residuals relative to predicted taper values (d).

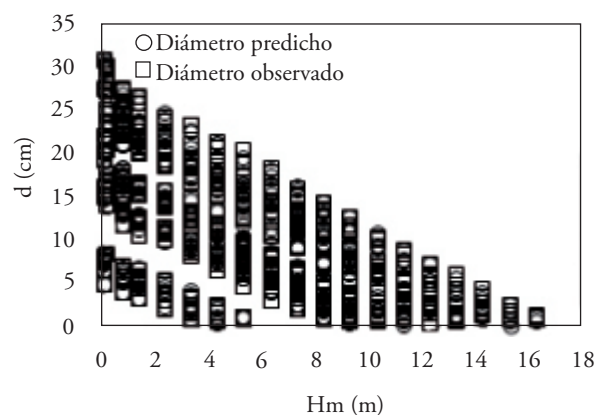


Figura 5. Valores observados y predichos del ahusamiento (d) a diferentes alturas (H_m).

Figure 5. Observed and predicted taper values (d) at different heights (H_m).

en porcentaje (Figura 6), sugiere que las predicciones correspondientes a la sección más cercana al tocón y la altura superior (punta no comercial) son menos precisas que en las otras secciones del fuste. Es normal que las estimaciones obtenidas a alturas (1.30 m) menores a la del diámetro normal sean sesgadas debido a la estructura matemática del modelo.

Sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial

El ajuste simultáneo de las funciones segmentadas de ahusamiento compatibles con el volumen comercial permitió minimizar los errores de los estimadores de los parámetros para los dos componentes (Cuadro 6) (Jiang *et al.*, 2005; Cruz-Cobos *et al.*, 2008; Quiñonez-Barraza *et al.*, 2014). Los parámetros en todas las funciones segmentadas resultaron altamente significativos con un nivel de confiabilidad de 95 %. Los valores de la prueba de Durbin-Watson (DW) de autocorrelación fueron cercanos a 2, lo que indica la corrección de la autocorrelación en las funciones de ahusamiento (Durbin y Watson, 1971).

La mejor función segmentada de ahusamiento compatible con el volumen comercial fue el modelo 5 seguido por el 6 y 7, porque presentó estadísticos más consistentes y por tanto describe con mayor precisión el perfil del fuste, volumen total y volumen comercial a cualquier diámetro o altura comercial del árbol. El modelo 5 garantiza la compatibilidad completa entre la ecuación de volumen total, ahusamiento y volumen comercial. Así, cuando $H_m = H$ y $d = 0$, el modelo de volumen comercial es algebraicamente idéntico al modelo de volumen total. Esto indica que está explícita una ecuación de volumen total de Schumacher y Hall (1933) que se puede sustituir por cualquier otra ecuación que define los diferentes cuerpos geométricos del árbol. Las estimaciones de manera simultánea minimizan la suma de errores cuadráticos entre los componentes.

El ajuste simultáneo del modelo 5 sugiere dos puntos de inflexión: el primero sucede al 5 % de altura total e indicó el cambio geométrico de neiloide a paraboloides, y el segundo al 48 %, que describe el cambio geométrico de paraboloides a un cono. Sin embargo, los modelos 6 y 7 muestran variación mayor en los puntos de inflexión ($\rho_1 = 8\%$ y $\rho_2 = 65\%$ para el modelo 6; $\rho_1 = 79\%$ para el modelo 7) debido que en algunos de los sistemas segmentados existen

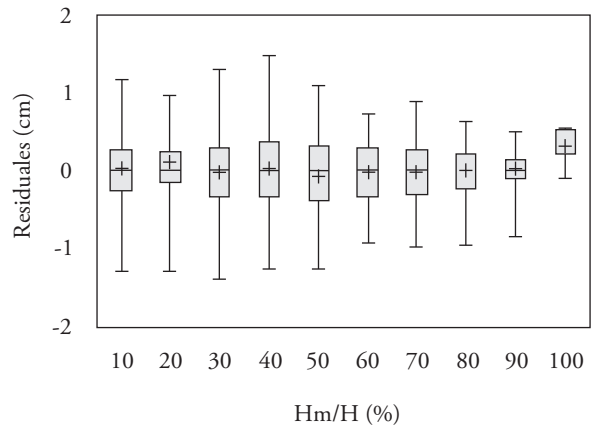


Figura 6. Distribución de los residuales del ahusamiento (d) con respecto a la altura relativa (Hm/H) para el modelo 5.

Figure 6. Distribution of taper residuals (d) with respect to relative height (Hm/H) for model 5.

— representa la mediana, + la media los residuales. El cuadro representa el rango intercuartil. Los valores máximo y mínimo están representados por los pequeños segmentos horizontales superiores e inferiores. ♦ — represents the median, + residual means. The box represents the interquartile range. The maximum and minimum values are represented by the small upper and lower horizontal segments.

Distribution of taper residuals by category of relative height (Hm/H), expressed in percentage (Figure 6) suggests that the predictions corresponding to the section closest to the stump and the upper height (unmerchantable tip) are less precise than those of the other sections of the stem. It is normal that estimations obtained at lower heights than that of breast height (1.30 m) are biased because of the mathematical structure of the model.

Compatible taper and merchantable volume system

Simultaneous fit of segmented taper functions compatible with merchantable volume allowed minimization of the errors of the parameter estimators for the two components (Table 6) (Jiang *et al.*, 2005; Cruz-Cobos *et al.*, 2008; Quiñonez-Barraza *et al.*, 2014). The parameters in all the segmented functions were highly significant at a confidence level of 95 %. The values of the Durbin-Watson (DW) test of autocorrelation were close to 2, indicating correction

Cuadro 6. Estadísticos de ajuste, valores y significancia de los parámetros de las funciones segmentadas compatibles de ahusamiento y volumen comercial.

Table 6. Fit statistics, values and significance of the parameters of the compatible segmented taper functions and merchantable volume.

M	C	RMSE	R ² _{adj}	CV	Sesgo	DW	p	y	e ^t	∞	
5	d	0.691	0.992	6.023	0.033	2.081	α_0	0.000067	2.671E-6	<0.0001	
							α_1	1.679573	0.0182	<0.0001	
							α_2	1.087404	0.0242	<0.0001	
							β_1	0.00001	4.137E-7	<0.0001	
							β_2	0.000027	3.491E-7	<0.0001	
	V _c	0.004	0.997	4.915	0.00003	-	-	β_3	0.000024	4.679E-7	<0.0001
								ρ_1	0.052721	0.00351	<0.0001
								ρ_2	0.488687	0.0371	<0.0001
								γ_1	0.306148	0.0647	<0.0001
								γ_2	0.233777	0.0507	<0.0001
6	d	0.790	0.990	7.376	0.024	2.061	β_1	-2.96756	0.00249	<0.0001	
							β_2	1.5	-	-	
							β_3	75.18799	9.7464	<0.0001	
							β_4	-0.82395	0.0239	<0.0001	
							ρ_1	0.082102	0.00597	<0.0001	
	V _c	0.007	0.992	7.991	0.001	-	-	ρ_2	0.659362	-	-
								γ_1	0.535334	0.0643	<0.0001
								γ_2	0.400735	0.0458	<0.0001
								β_1	0.933558	0.0716	<0.0001
								β_2	0.45444	0.1123	<0.0001
7	d	0.860	0.988	8.082	0.039	2.115	β_3	-0.41239	0.0473	<0.0001	
							β_4	1.604392	0.0875	<0.0001	
							ρ_1	0.790092	0.0437	<0.0001	
	V _c	0.032	0.881	31.287	0.009	-	-	γ_1	0.513024	0.0649	<0.0001
								γ_2	0.28124	0.0475	<0.0001

M modelo, C componente, p parámetro, ψ valor de los estimadores de los parámetros, ϵ^t error estándar de los estimadores de los parámetros, ∞ nivel de significancia de los parámetros. ♦ M model, C component, p parameter, ψ value of parameter estimators, ϵ^t standard error of the parameter estimators, ∞ level of significance of the parameters.

problemas de colinealidad en sus parámetros, lo que dificulta estimar algunos de los parámetros al realizar el ajuste simultáneo (Fang *et al.*, 2000). De acuerdo con Max y Burhhart (1976), citados por Hernández *et al.* (2013), la convergencia en el modelo 6 se logra asignando un valor de $\beta_2=1.5$, mientras que el valor de $\rho_2=0.659362$ se obtuvo del ajuste del sistema compatible.

En la literatura sobre biometría, nacional e internacional (EE.UU., noroeste de España, y México), se ha implementado con mayor frecuencia el modelo 5 para describir el perfil del fuste y volumen comercial variable, por la facilidad de adaptación a diversas condiciones de crecimiento de árboles en diferentes tipos de bosques y plantaciones forestales comerciales, para especies de coníferas y latifoliadas (Fang *et*

of autocorrelation in the taper functions (Durbin and Watson, 1971).

The best segmented taper function compatible with merchantable volume was model 5, followed by models 6 and 7, because it had the most consistent statistics and, therefore, describes the stem profile, total volume and merchantable volume at any merchantable diameter or height more precisely. Model 5 guarantees complete compatibility among total volume, taper and merchantable equations. Thus, when $H_m = H$ and $d = 0$, the merchantable volume model is algebraically identical to the total volume model. This indicates that a Schumacher and Hall (1933) total volume equation is explicit, and it can be substituted by any other equation that defines the different geometric types of the

al., 2000; Diéguez-Aranda *et al.*, 2006; Corral *et al.*, 2007; Hernández *et al.*, 2013; Quiñonez-Barraza *et al.*, 2014; Tamarit *et al.*, 2014; Uranga-Valencia *et al.*, 2015).

La precisión del modelo 5 para estimar el volumen comercial (A) y el perfil del fuste (B) para *P. chiapensis* queda demostrada mediante análisis gráficos, en los cuales se observa que los valores observados y predichos son similares (Figura 7).

Los residuales del ahusamiento (d) y del volumen comercial (V) para el modelo 5 presentan una distribución homogénea frente a los volúmenes predichos (Figura 8). Torres y Magaña (2001) mencionan que los modelos de volumen tienen problemas de heterocedasticidad dado a que a mayores valores de diámetro y altura, la variación en los volúmenes de los árboles es más grande.

tree. Simultaneous estimations minimize the sum of quadratic errors among components.

The simultaneous fit of model 5 suggests two inflection points: the first occurs at 5 % of the total height and indicates a geometric change from neiloid to paraboloid, and the second occurs at 48 % and describes the geometric change from paraboloid to cone. However, models 6 and 7 exhibit greater variation in the inflection points ($\rho_1=8\%$ and $\rho_2=65\%$ for model 6; $\rho_1=79\%$ for model 7) because in some of the segmented systems there are problems of collinearity in their parameters, which make it difficult to estimate some of the parameters when carrying out simultaneous fit (Fang *et al.*, 2000). According to Max and Burkhart (1976), cited by Hernández *et al.* (2013), convergence in model 6 is achieved by assigning a value of $\beta_2=1.5$, while with

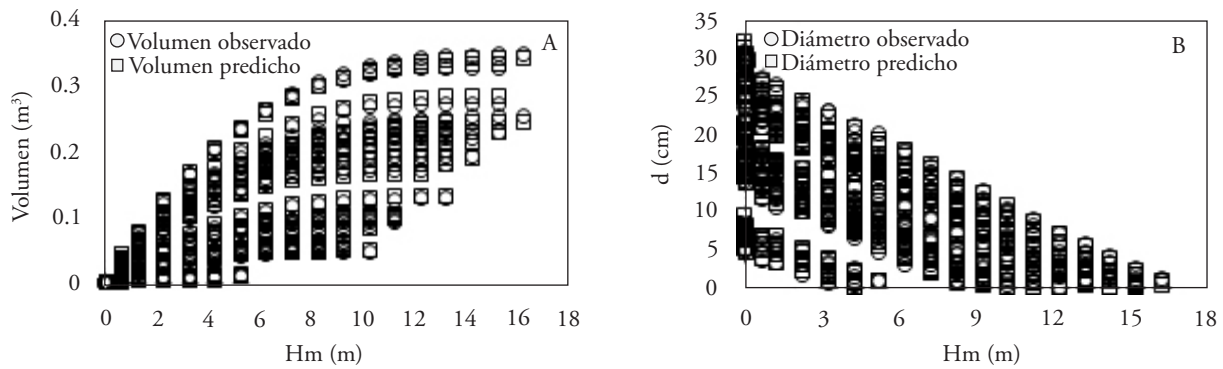


Figura 7. Comportamiento de los valores observados y predichos del volumen comercial (A) y ahusamiento (B) a diferentes alturas (Hm).

Figure 7. Behavior of observed and predicted values of merchantable volume (A) and taper (B) at different heights (Hm).

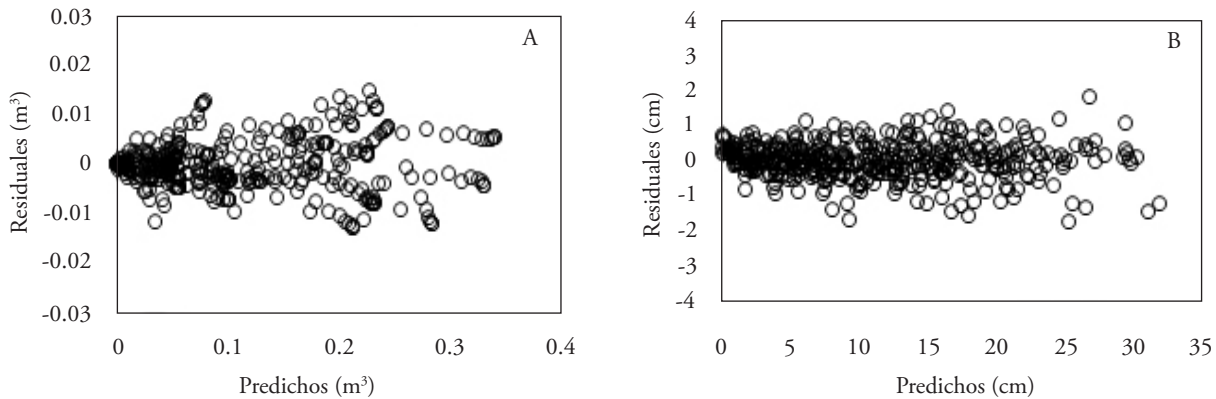


Figura 8. Distribución de los residuales del volumen (A) y ahusamiento (B) con respecto sus valores predichos.

Figure 8. Distribution of residuals of volume (A) and taper (B) relative to predicted values.

La distribución de los residuales del volumen por categorías diamétricas (CD) (A) y de altura relativa (Hm/H) (B), expresado en porcentajes, resultan eficientes y precisos hasta un diámetro comercial de 25 (cm) (Figura 9), y que su aplicación en diámetros y alturas por debajo del diámetro normal presentan mayor sesgo (Corral-Rivas *et al.*, 2007; Quiñonez-Barraza *et al.*, 2014).

Sistema segmentado de Fang *et al.* (2000) variando la ecuación de volumen total

El mejor modelo para cubicación de árboles individuales de *P. chiapensis* se seleccionó evaluando tres modelos de volumen total en el sistema de Fang *et al.* (2000). Los valores de los estadísticos obtenidos en el ajuste de los modelos de volumen total dentro del sistema permitieron evaluar y seleccionar al mejor modelo, y por tanto comparar con el modelo segmentado compatible 5, en el cual está explícito el modelo de volumen total de Schumacher y Hall (1). Una prueba estadística de Tukey permitió definir el mejor modelo de acuerdo con el valor de la media estimada en los componentes de ahusamiento y volumen comercial con respecto a la media observada de ambos componentes.

En nuestro estudio se pretende definir el mejor sistema de cubicación de volumen total y comercial de árboles individuales evaluando diferentes modelos. Los valores de los estadísticos de ajuste y los estimadores de los parámetros de los modelos de volumen

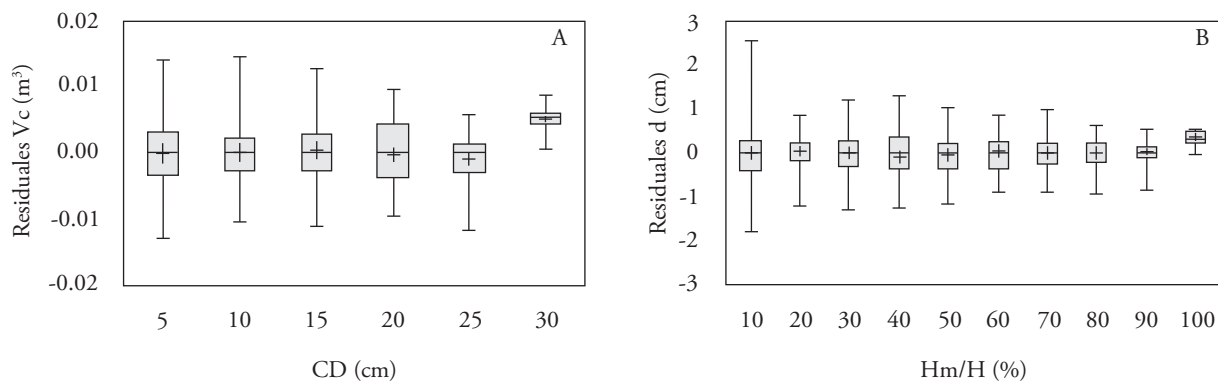
the value of $\rho_2=0.659362$, fit of the compatible system was obtained.

In the national and international literature (USA, northwestern Spain and Mexico) on biometry, model 5 has been implemented more frequently to describe stem profile and variable merchantable volume because of the ease of adapting it to diverse conditions of tree growth in different types of forests and commercial forest plantations, for conifer and for broadleaf species (Fang *et al.*, 2000; Diéguez-Aranda *et al.*, 2006; Corral *et al.*, 2007; Hernández *et al.*, 2013; Quiñonez-Barraza *et al.*, 2014; Tamarit *et al.*, 2014; Uranga-Valencia *et al.*, 2015).

Precision of model 5 in estimating merchantable volume (A) and stem profile (B) for *P. chiapensis* is demonstrated by graphical analysis, in which it can be seen that observed and predicted values are similar (Figure 7).

Segmented system of Fang *et al.* (2000), varying the total volume equation

The best model for individual volume estimation of *P. chiapensis* trees was selected after evaluating three total volume models in the Fang *et al.* (2000) system. The values of the statistics obtained in the total volume model fit within the system allowed evaluation and selection of the best model and, therefore, comparison with the compatible segmented model 5, in which the Schumacher and Hall total volume model (1) is explicit. A Tukey test



— representa la mediana, + la media los residuales. El cuadro representa el rango intercuartil. Los valores máximo y mínimo están representados por los pequeños segmentos horizontales superiores e inferiores. ♦ — represents the median, + the mean of residuals. The box represents the interquartile range. The maximum and minimum values are represented by the small upper and lower horizontal segments.

Figura 9. Distribución de los residuales del volumen comercial (A) y del ahusamiento (B) para el modelo 5.
Figure 9. Distribution of residuals of merchantable volume (A) and taper (B) for model 5.

total ajustados en el sistema compatible de Fang *et al.* (2000) se muestran en el Cuadro 7. Los parámetros del sistema segmentado de Fang *et al.* (2000) resultaron altamente significativos con un nivel de confiabilidad de 95 %. El valor de DW fue superior a 2, e indica la corrección de la autocorrelación en las funciones de ahusamiento (Durbin y Watson, 1971). El modelo de volumen total 4 fue el de mayor precisión, seguido del modelo 2 y 3, al obtener mayor coeficiente de determinación y menores valores en la raíz del cuadrado medio de error, coeficiente de variación y sesgo promedio. Los resultados obtenidos tanto en el modelo 5 y el 4 son similares en los estadísticos evaluados, aunque el modelo 4 resulta ligeramente mejor en el componente ahusamiento y el

permitted defining the best model according to the mean value estimated in the taper and merchantable volume components, relative to the observed mean of both components.

In our study, we sought to define the best system for total and merchantable volume of individual trees by evaluating different models. The values of the fit statistics and the parameter estimates of the total volume models fitted to the compatible system of Fang *et al.* (2000) are shown in Table 7. The parameters of the segmented system of Fang *et al.* (2000) were highly significant at a confidence level of 95%. The DW value was above 2 and indicates correction of autocorrelation in the taper functions (Durbin and Watson, 1971).

Cuadro 7. Estadísticos de ajuste, valores y significancia de los parámetros del sistema segmentado de Fang et al. (2000) variando la ecuación de volumen total.

Table 7. Fit statistics, values and significance of the parameters of the segmented system of Fang et al. (2000), varying the total volume equation.

M	C	R ² _{adj}	RMSE	CV	Sesgo	DW	p	ψ	ϵ^t	∞
2	d	0.9908	0.7495	6.4784	0.10446	2.050	α_0	0.002992	0.000340	<0.0001
							α_1	0.000031	1.13E-7	<0.0001
							β_1	9.612E-6	3.983E-7	<0.0001
							β_2	0.000027	4.068E-7	<0.0001
							β_3	0.000023	5.409E-7	<0.0001
	Vc	0.9948	0.0066	6.8081	0.00138	-	ρ_1	0.052914	0.00357	<0.0001
							ρ_2	0.501187	0.0394	<0.0001
							γ_1	0.376984	0.0679	<0.0001
							γ_2	0.294103	0.0491	<0.0001
							α_1	0.000031	1.127E-7	<0.0001
3	d	0.9905	0.7626	6.4423	0.19266	2.0369	β_1	9.266E-6	3.679E-7	<0.0001
							β_2	0.000027	4.384E-7	<0.0001
							β_3	0.000023	5.825E-7	<0.0001
							ρ_1	0.054105	0.00353	<0.0001
							ρ_2	0.50604	0.0387	<0.0001
	Vc	0.9937	0.00736	7.3949	0.00190	-	ρ_1	0.438447	0.0687	<0.0001
							γ_2	0.34481	0.0502	<0.0001
							α_1	22 169.09	347.9	<0.0001
							α_2	429.5973	15.3510	<0.0001
							ρ_1	9.934E-6	4.066E-7	<0.0001
4	d	0.9924	0.6849	5.9653	0.04610	2.075	β_2	0.000027	3.37E-7	<0.0001
							β_3	0.000024	4.684E-7	<0.0001
							ρ_1	0.052152	0.00344	<0.0001
							ρ_2	0.491189	0.0361	<0.0001
							γ_1	0.313835	0.0650	<0.0001
	Vc	0.9973	0.00481	5.0044	0.00001	-	γ_2	0.234768	0.0516	<0.0001

M modelo, C componente, p parámetro, ψ valor de los estimadores de los parámetros, ϵ^t error estándar de los estimadores de los parámetros. - no existe información, ∞ nivel de significancia de los estimadores de los parámetros (todos los parámetros fueron significativos al 5 %). ♦ M model, C component, p parameter, ψ value of the parameter estimators, ϵ^t standard error of the parameter estimators. - no information exists, ∞ significance level of the parameter estimators (all parameters were significant at 5 %).

modelo 5 en el volumen comercial. Por tanto, ambos sistemas estiman con precisión el perfil del fuste y volumen comercial para *P. chiapensis*.

La prueba estadística de Tukey sugiere que no hay diferencias significativas en las medias de los componentes de ahusamiento y volumen comercial estimados con los modelos 4 y 5, con respecto a los valores observados (Cuadro 8), por lo que los dos sistemas producen estimaciones realistas en el ahusamiento y volumen comercial, y pueden usarse para la cubicación de árboles individuales para *P. chiapensis*, aunque en el modelo 4 se reduce el número de parámetros de 3 a 2 y en el sistema de 6 a 5. Así, usar cualquiera de los dos modelos queda a criterio del usuario.

En relación al ahusamiento, los parámetros β_i estimados para los modelos de volumen total ajustados en el sistema de Fang *et al.* (2000) sugieren los mismos cuerpos geométricos (neiloide para el segmento 1 y cónicos para el segmento 2 y 3) en los segmentos del árbol (Cuadro 9).

Los resultados obtenidos con el modelo 4 en los componentes de volumen comercial (A) y ahusamiento (B) con respecto a Hm, son similares a los valores observados (Figura 10).

Los residuales estimados en los componentes de ahusamiento y volumen comercial en el modelo 4 no evidenciaron problemas de heterocedasticidad. La

Total volume model 4 was that of highest precision, followed by models 2 and 3, obtaining a higher coefficient of determination and lower values of the mean square root of the error, coefficient of variation and average bias. The results obtained in both model 5 and 4 are similar in the statistics evaluated, although model 4 was slightly better in the taper component and model 5 in merchantable volume. Therefore, both systems estimate stem profile and merchantable volume with precision for *P. chiapensis*.

The Tukey test suggests that there are no significant differences between the means of the taper components and merchantable volume estimated with models 4 and 5, relative to observed values (Table 8). The two systems, therefore, produce realistic estimations in taper and merchantable volume for individual *P. chiapensis* trees, although in model 4 the number of parameters is reduced from 3 to 2 and in the system from 6 to 5. Thus, using either of the two models depends on user criteria.

Regarding taper, the β_i parameters estimated for the total volume models fitted in the Fang *et al.* (2000) system suggest the same geometric bodies (neiloid for segment 1 and conical for segments 2 and 3) of the tree segments (Table 9).

The results obtained with model 4 in the merchantable volume (A) and taper (B) components,

Cuadro 8. Resultados de la prueba estadística paramétrica de Tukey.
Table 8. Results of the Tukey parametric statistical test.

Valores	Media ¹	Media ²	Grupo ³
Observados	11.3987	0.095935	A
Estimado modelo 4	11.3526	0.095923	A
Estimado modelo 5	11.3654	0.095901	A

¹ahusamiento, ²volumen comercial, ³letras iguales no son significativamente diferentes. ♦ ¹taper, ²merchantable volume, ³different letters indicate significant differences.

Cuadro 9. Cuerpos geométricos estimados con los parámetros β_i para *P. chiapensis*.
Table 9. Geometric bodies estimated with β_i parameters for *P. chiapensis*.

Parámetros	Segmentos	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
β_1	1	0.122	0.117	0.126	0.127
β_2	2	0.343	0.343	0.343	0.343
β_3	3	0.292	0.292	0.305	0.305

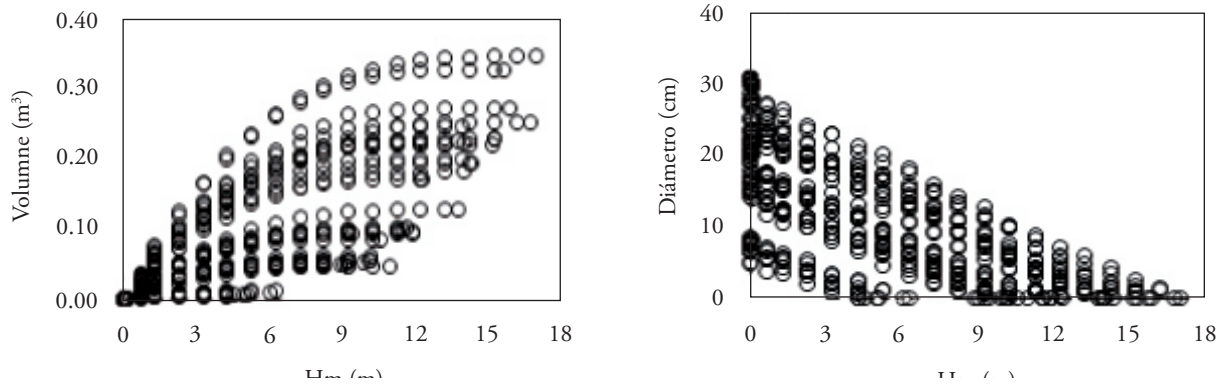


Figura 10. Comportamiento de los valores observados y predichos del volumen comercial (A) y ahusamiento (B) a diferentes alturas (Hm).
Figure 10. Behavior of observed and predicted merchantable volume (A) and taper (B) values at different heights (Hm).

distribución de los residuales presenta una distribución homogénea frente a los valores predichos (Figura 11).

La distribución de los residuales del volumen por categorías diamétricas (CD) (A), y el perfil del fuste en porcentajes de altura relativa (Hm/H) (B), sugiere que las estimaciones del volumen son eficientes y precisas hasta un diámetro comercial de 25 (cm); por tanto, en categorías mayores los errores son más grandes (Figura 12 (A)). La predicción del diámetro correspondiente a las secciones más cercanas al tocón y la altura superior (punta no comercial) es menos precisa que para otras secciones del fuste (Figura 12 (B)).

El modelo (3) de coeficiente de forma constante ajustado en el sistema compatible de Fang *et al.* (2000), permite describir la forma geométrica del

relative to Hm, are similar to the observed values (Figure 10).

There was no evidence of heteroscedasticity problems in estimated residuals in the taper and merchantable volume components in model 4. Distribution of the residuals is homogeneous against the predicted values (Figure 11).

The distribution of the residuals of volume by diameter class (CD) (A) and the stem profile in percentages of relative height (Hm/H) (B) suggest that the volume estimates are efficient and precise up to a merchantable diameter of 20 (cm). Therefore, in larger categories, the errors are also larger (Figure 12 (A)). The prediction of the diameter corresponding to the sections closest to the stump and the upper height (non-merchantable tip) is less precise than for other sections of the stem (Figure 12 (B)).

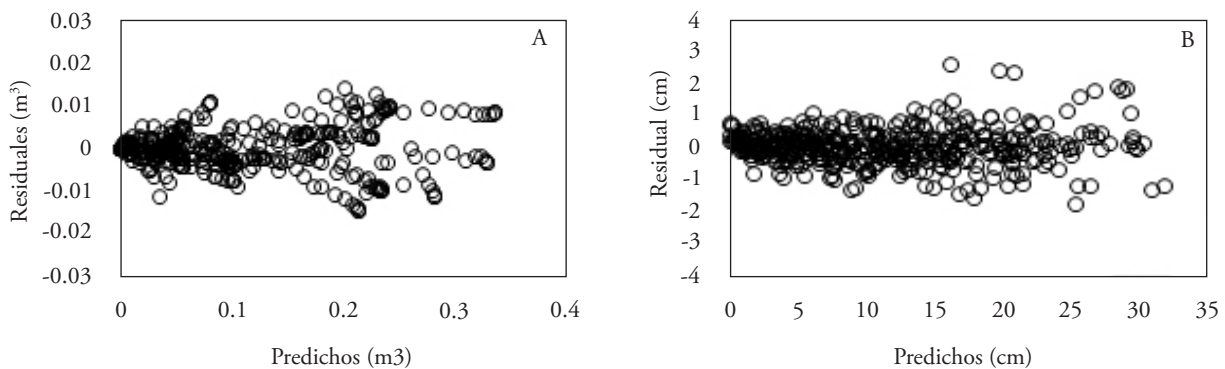
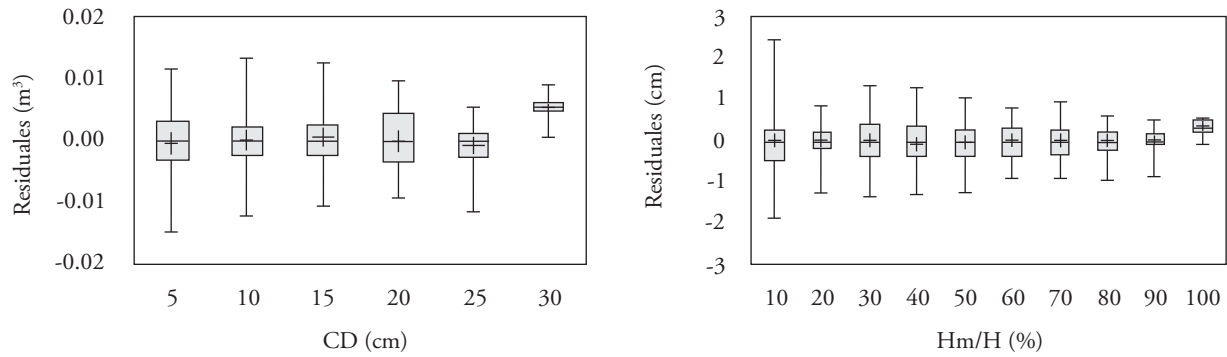


Figura 11. Distribución de los residuales del volumen comercial (A) y ahusamiento (B) con respecto a sus valores predichos.
Figure 11. Distribution of the residuals of merchantable volume (A) and taper (B), relative to predicted values.



– representa la mediana, + la media los residuales. El cuadro representa el rango intercuartil. Los valores máximo y mínimo están representados por los pequeños segmentos horizontales superiores e inferiores. ♦ – Represents the median, + the mean of the residuals. The box represents the interquartile range. The maximum and minimum values are represented by the small upper and lower horizontal segments.

Figura 12. Distribución de los residuales del volumen comercial (A) y del ahusamiento (B) para el modelo 4.
Figure 12. Distribution of the residuals of merchantable volume (A) and taper (B) for model 4.

árbol como si fuera un segmento genérico del modelo general; puede observarse entonces un factor de forma medio de $k=0.39$ calculado con la expresión $\left(k = \alpha_1 \times \frac{40000}{\pi}\right)$. Con el tiempo y la aplicación de labores silvícolas como aclareos, podas, y mejoramiento genético, podría disminuir el ahusamiento del fuste.

CONCLUSIONES

Los resultados permiten obtener la distribución de productos potencial y posibilitan la evaluación financiera para la especie en la región de estudio de una manera más objetiva. El predio bajo estudio está sujeto a constantes podas, por lo que se esperaría un factor de forma mayor de fuste para *Pinus chiapensis*. Sin embargo, los resultados denotan un factor de forma bajo, a pesar de la intensidad de las podas aplicadas y una silvicultura con constante remoción de vegetación competidora. Esto en parte se debe al fuerte control genético que tiene la forma, pero también en parte al rango de los datos. Los árboles medidos fueron jóvenes y de crecimiento rápido, lo que puede explicar los patrones cónicos del fuste. El aumento del rango de los datos, sobre todo de árboles de mayor edad y tamaño, probablemente permita ver como el factor de forma aumenta sobre todo en edades cercanas al turno técnico.

Model (3) of the constant form coefficient fitted in the compatible system of Fang *et al.* (2000) allows describing the geometric form of the tree as if it were a generic segment of the general model. A mean form factor of $k=0.39$ calculated with the expression $\left(k = \alpha_1 \times \frac{40000}{\pi}\right)$ can then be observed. Over time and with silvicultural practices such as thinning, pruning and genetic improvement, stem tapering could decrease.

CONCLUSIONS

The results allow us to obtain the potential distribution of products and make financial evaluation possible for the species in the study region in a more objective manner. The plot under study is subject to constant pruning, and so a higher stem form factor for *Pinus chiapensis* would be expected. However, the results denote a low form factor, despite the intensity of the pruning and constant silvicultural practices of constant removal of competing vegetation. This, in part, is due to the strong genetic control of shape, but also partly due to the range of the data. The measured trees were young and of rapid growth, which can explain the conical patterns of the stem. An increase in the range of the data, especially older, larger trees, would most likely increase the form factor, especially in the ages near the volume rotation.

LITERATURA CITADA

- Barrios, A., A. M. López, y V. Nieto. 2014. Predicción de volúmenes comerciales de *Eucalyptus grandis* a través de modelos de volumen total y de razón. *Colombia For.* 17: 137-149.
- Bailey, L. R. 1995. Upper stem volumes from stem analysis data: an overlapping bolts method. *Can. J. For. Res.* 25: 170-173.
- Brooks, J. R., L. Jiang, and R. Özcelik. 2008. Compatible stem volume and taper equations for Brutian pine, Cedar of Lebanon, and Cilicica fir in Turkey. *For. Ecol. Manage.* 256: 147-151.
- Cao, Q. V., H. E. Burkhart, and T. A. Max. 1980. Evaluation of two methods for cubic-volume prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *For. Sci.* 26: 71-80.
- Corral-Rivas, J. J., U. Diéguez-Aranda, S. Corral R., and F. Castedo D. 2007. A merchantable volume system for major pine species in El Salto, Durango (México). *For. Ecol. Manage.* 238: 118-129.
- Corral-Rivas, S., y J. J. Nívar-Cháidez. 2009. Comparación de técnicas de estimación de volumen fustal total para cinco especies de pino de Durango, México. *Rev. Chapingo Serie Ciencias. For. Ambiente* 15: 5-13.
- Cruz-Cobos, F., H. M. De los Santos-Posadas, y J. R. Valdéz-Lazalde. 2008. Sistema compatible de ahusamiento-volumen para *Pinus cooperi* Blanco en Durango México. *Agrociencia* 42: 473-485.
- Demaerschalk, J. P. 1972. Converting volume equations to compatible taper equations. *For. Sci.* 18: 241-245.
- Diéguez-Aranda, U., F. Castedo-Dorado, J. G. Álvarez-González, and A. Rojo. 2006. Compatible taper function for Scots pine plantations in northwestern Spain. *Can. J. For. Res.* 36: 1190-1205.
- Durbin, J., and G. S. Watson. 1971. Testing for serial correlation in least squares regression III. *Biometrika* 58: 1-19.
- Fang, Z., B. E. Borders, and R. L. Bailey. 2000. Compatible volume-taper models for Loblolly and Slash pine based on a system with segmented-stem form factors. *For. Sci.* 46: 1-12.
- Fernández, T., E., E. H. Fassola, y M. García C. 2011. Ecuación volumen total para *Populus deltoides* de Plantaciones de Bajo Delta del Paraná. *RIA: Rev. Invest. Agropec.* 37: 172-179.
- Hernández, P., D., H. M. De los Santos P., G. Ángeles P., J. R. Valdez L., y V. H. Volke H. 2013. Funciones de ahusamiento y volumen comercial para *Pinus patula* Schltdl. *Et Cham. En Zacualtipán, Hidalgo. Rev. Mex. Cien. For.* 4: 35-45.
- INEGI (Instituto Nacional de Estadística y Geografía). 2009. Prontuario de información geográfica municipal de los Estados Unidos Mexicanos. 2016. <http://www3.inegi.org.mx/sistemas/mexicocifras/datos-geograficos/21/21186.pdf>. (Consulta: noviembre 2015).
- Jiang, L., J. R. Brooks, and J. Wang. 2005. Compatible taper and volume equations for yellow-poplar in West Virginia. *For. Ecol. Manage.* 213: 399-409.
- Kozak, A. 2004. My last words on taper equations. *The For. Chron.* 80: 507-515.
- Max, T. A., and H. E. Burkhart. 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. *For. Sci.* 22: 283-289.
- Melchor, M., J. I., M. Rodríguez A., y A. E. Romero H. 2006. Modelo volumétrico fustal aplicable a bosques naturales de *Pinus chiapensis* (Martínez) Andresen. *Fichas Tecnológicas Sistema Producto. Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias (INIFAP).* 3 p.
- McTague, J. P., and R. L. Bailey. 1987. Simultaneous total and merchantable volume equations and a compatible taper function for loblolly pine. *Can. J. For. Res.* 17: 87-92.
- Muñoz, F., H. J., J. C. Velarde R., J. J. García M., J. T. Sáenz R., E. H. Olvera D., y J. Hernández R. 2012. Predicción de volúmenes de fuste total para plantaciones de *Pinus greggii* Engelm. *Rev. Mex. Cien. For.* 3: 11-22.
- Parresol, B. R., J. E. Hotvedt, and Q. V. Cao. 1987. A volume and taper prediction system for bald cypress. *Can. J. For. Res.* 17: 250-259.
- Quiñonez-Barraza, G., H. M. De los Santos-Posadas, J. G. Álvarez-González, y A. Velázquez-Martínez. 2014. Sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial para las principales especies de *Pinus* en Durango, México. *Agrociencia* 48: 553-567.
- Ramos-Uvilla, J. A., J. J. García-Magaña, J. Hernández-Ramos, X. García-Cuevas, J. C. Velarde-Ramírez, H. J. Muñoz-Flores, y G. G. García E. 2014. Ecuaciones y tablas de volumen para dos especies de *Pinus* de la Sierra Purhépecha, Michoacán. *Rev. Mex. Cien. For.* 5: 92-109.
- Rojo, A., X. Perales, F. Sánchez-Rodríguez, J. G. Álvarez-González, and K. v. Gadow. 2005. Stem taper functions for maritime pine (*Pinus pinaster* Ait.) in Galicia (Northwestern Spain). *Eur. J. For. Res.* 124: 177-186.
- Schumacher, E. X., and F. D. S. Hall. 1933. Logarithmic expression of timber-tree volume. *J. Agr. Res.* 4: 719-734.
- Spurr, H. 1952. *Forest Inventory.* Ronald Press, New York, USA. 476 p.
- SAS (Statistical Analysis System) Institute Inc. 2008. *SAS/STAT® 9.2 User's Guide.* SAS Institute Inc. Raleigh, NC USA. s/p.
- Takata, K., 1958. Construction of universal diameter-height-curves. *J. Jap. For. Soci.* 40: 1-6.
- Tamarit, U., J. C., H. M. De los Santos P., A. Aldrete, J. R. Valdez L., H. Ramírez M., y V. Guerra De la C. 2014. Sistema de cubicación de árboles individuales de *Tectona grandis* L f. mediante funciones compatibles de ahusamiento-volumen. *Rev. Mex. Ciencias For.* 5: 58-74.
- Tapia, J., y J. Nívar. 2011. Ajuste de modelos de volumen y funciones de ahusamiento para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en bosques de pino de la sierra madre oriental de Nuevo León, México. *For. Ver.* 13: 19-28.
- Torres, R., J. M., y O. S. Magaña T. 2001. *Evaluación de Plantaciones Forestales.* Ed. LIMUSA, México. 472 p.
- Uranga-Valencia, L. P., H. M. De Los Santos-Posadas, J. R. Valdez-Lazalde, J. López-Upton, y H. Navarro-Garza. 2015. Volumen total y ahusamiento para *Pinus patula* Schiede *ex* Schltdl. *et Cham.* en tres condiciones de bosque. *Agrociencia* 49: 787-801.
- Wiant, Jr. H. V., G. B. Wood, and G. M. Furnival. 1992. Estimating log volume using the centroid position. *For. Sci.* 38: 187-191.
- Zakrzewski, W. T., and D. W. MacFarlane. 2006. Regional stem profile model for cross-border comparisons of harvested Red pine (*Pinus resinosa* Ait.) in Ontario and Michigan. *For. Sci.* 52: 468-475.
- Zepeda, B., E. M., y A. Domínguez P. 1997. Ecuaciones de ahusamiento para tres especies de pino, del Ejido El Largo, Chihuahua. *In: Memoria de resúmenes de ponencias. III Congreso Mexicano sobre Recursos Forestales.* Linares, NL. México. 43 p.
- Zimmerman, D. L., and V. Núñez-Antón. 2001. Parametric modeling of growth curve data: an overview (with discussion). *Test* 10:1-73.

